Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

DUAL MATHEMATICAL MODELS OF LIMIT LOAD ANALYSIS PROBLEMS OF STRUCTURES BY MIXED FINITE ELEMENTS

S. Kalanta

ISSN 1392-1525. STATYBA - CIVIL ENGINEERING - СТРОИТЕЛЬСТВО, 1997, Nr. 2(10)

ДВОЙСТВЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С. Каланта

1. Введение

Задачи расчета предельной нагрузки конструкций обычно формулируются в статической и кинематической постановках. Многочисленные исследования по расчету и оптимизации предельной нагрузки континуальных систем (пластин, оболочек и т.д.) с применением конечных элементов можно разделить на две основные группы (табл. 1). К первой группе отнесем работы [1]-[5] и др., в которых дискретные математические модели статической и кинематической постановок задач строятся независимо друг от друга с применением соответственно равновесных и совместных конечных элементов. Они позволяют определить нижнюю и верхнюю оценки параметра предельной нагрузки (задачи оптимизации нагрузки не рассматриваются). Возможные разрывы функций скоростей перемещений в поверхностях пластического разрушения конструкций учитываются только в кинематической постановке задач. При этом кинематическая формулировка задач расчета предельной нагрузки пластинок и оболочек представляет собой задачу невыпуклого программирования. В работах второй группы ([6]-[9] и др.) применяются равновесные конечные элементы и строятся модели статических постановок задач. Рассматриваются не только задачи определения параметра предельной нагрузки, но и задачи оптимизации. Методом множителей Лагранжа получаются двойственные кинематические постановки. Здесь обе постановки являются задачами выпуклого программирования и позволяют определить нижнюю оценку предельной нагрузки. Однако в них обычно не моделируются поверхности возможных разрывов скоростей перемещений (поверхности пластического разрушения). Поэтому такие постановки задач не могут с достаточной точностью моделировать действительное поведение упруго-пластических пластинок и оболочек, пластическое разрушение которых обычно происходит из-за образования поверхностей сосредоточенных пластических деформаций, в которых имеют место разрывы функций скоростей перемещений и диссипация энергии. Нами преследуется цель, используя технику равновесных и совместных конечных элементов, разработать двойственные пары математических моделей задач анализа и оптимизации предельной нагрузки, в которых учитывались бы разрывы функций скоростей перемещений и скорость диссипации энергии в пластических поверхностях конечных элементов (табл. 1, группа III). Двойственные пары моделей на основе равновесных элементов уже построены в [10]. В настоящей статье с использованием совместных конечных элементов и исследований [10], [11] строятся альтернативные двойственные математические модели задач.

Таблица 1. Основные виды задач предельной нагрузки
Table 1. Main types of limit load analysis problems

Группа работ	Постановки по равновесию	Постановки по совместности
I	статическая	кинематическая
II	статическая	
	кинематическая	
III	статическая	кинематическая
	кинематическая	статическая

2. Общие вариационные постановки задач

Рассматривается жесткопластическое тело (обобщенная модель конструкции) заданного объема V при известных условиях опирания и функции $C(\mathbf{x})$ параметра текучести материала. На поверхности S_f тела распределена внешняя нагрузка $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, а на другой части его поверхности S_u заданы перемещения $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Определяются напряженно-деформированное состояние (НДС) и параметр F_0 или оптимальное распределение нагрузки, отвечающие предельному состоянию тела, возникающему из-за исчерпания его прочности. Тело разделяется на s конечных элементов объема V_k, $k \in \mathcal{K}$. НДС k-го элемента описывается вектор-функциями напряжений $\sigma_k(\mathbf{x})$, скоростей перемещений $\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_k(\mathbf{x})$. Функции напряжений и скоростей перемещений, относящиеся к смежным конечным элементам, разделенным поверхностью S_t, обозначаются знаками " + " и " − ". Пусть номера $t = 1,2,\dots,z$ поверхностей S_t конечных элементов образуют множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}_v \cup \mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_u$, где $\mathcal{T}_v$ - множество номеров внутренних межэлементных поверхностей; $\mathcal{T}_f$ - множество номеров граничных, принадлежащих S_f, поверхностей элементов; $\mathcal{T}_u$ - множество номеров граничных поверхностей S_{ut}. Пусть $\mathcal{T}_l = \mathcal{T}_v \cup \mathcal{T}_f$.

Математические модели задач анализа и оптимизации предельной нагрузки строятся на основе задач определения стационарной (седловой) точки соответствующих смешанных функционалов. Эти функционалы получаются преобразованием представленных в [10] математических моделей статической постановки задач с использованием метода множителей Лагранжа. Итак, задача расчета параметра предельной нагрузки при заданном законе распределения $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_0 \eta(\mathbf{x})$ представляется задачей стационарности:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + F_0 \left\{ 1 - \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_t} \dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x}) \eta_t(\mathbf{x}) dS_t \right\} \Rightarrow stac, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 = & \sum_k \int_{V_k} \sigma_k^T(\mathbf{x}) [\mathcal{A}]^T \dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}) dV_k + \\
& + \sum_{t \in \mathcal{T}_v} \int_{S_t^-} \left\{ \mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}) \right\}^T \left\{ \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t^-(\mathbf{x}) \right\} dS_t + \\
& + \sum_{t \in \mathcal{T}_l} \int_{S_t^+} \left\{ \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) \right\}^T \left\{ \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x}) \right\} dS_t - \\
& - \sum_{t \in \mathcal{T}_u} \int_{S_t^+} \left\{ \mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}) \right\}^T \dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x}) dS_t + \qquad (2a) \\
& + \sum_k \int_{V_k} \dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{f}_0\left(C_k(\mathbf{x})\right) - \mathbf{f}\left(\sigma_k(\mathbf{x})\right) \right\} dV_k + \\
& + \sum_{t \in \mathcal{T}_v} \int_{S_t^-} \left\{ \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) \right\}^T \left\{ \mathbf{f}_{0t}\left(C_t^-(\mathbf{x})\right) - \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})\right) \right\} dS_t + \\
& + \sum_{t \in \mathcal{T}} \int_{S_t^+} \left\{ \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) \right\}^T \left\{ \mathbf{f}_{0t}\left(C_t^+(\mathbf{x})\right) - \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})\right) \right\} dS_t ; \\
& \dot{\lambda}_k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ \in V_k; \quad \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ \in S_t .
\end{aligned}$$

Здесь F_0 - параметр предельной нагрузки; $[\mathcal{A}]^T$ - оператор дифференциальных геометрических уравнений; $\mathbf{p}_t(\mathbf{x})$, $\dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})$ - векторы напряжений и скоростей перемещений t-й поверхности раздела конечных элементов; $\mathbf{f}\left(\sigma_k(\mathbf{x})\right)$, $\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\right)$ - функции текучести в объеме V_k и на поверхности S_t конечного элемента; $\dot{\lambda}_k(\mathbf{x})$, $\dot{\lambda}_t(\mathbf{x})$ - множители закона пластического течения.

Задача оптимизации нагрузки при заданном критерии оптимальности $\varphi = \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_{ft}} \mathbf{T}_t^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_t(\mathbf{x}) dS_t$ также может быть представлена задачей стационарности функционала [10]

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_0 + \sum_{t \in \mathcal{T}_f} \int_{S_{ft}} \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{v}}_t(\mathbf{x}) \right\} dS_t , \quad (3)$$

где множитель $\dot{\mathbf{v}}_t(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$. Условие стационарности этих функционалов по статическим переменным $\sigma_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})$ и F_0 или $\mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\left[\nabla \mathbf{f}\left(\sigma_k(\mathbf{x})\right)\right]^T \dot{\lambda}_k(\mathbf{x}) + [\mathcal{A}]^T \dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \in V_k, k \in \mathcal{K}; \\
& -\left[\nabla \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})\right)\right]^T \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t^-(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \in S_t^-, t \in \mathcal{T}_v; \\
& -\left[\nabla \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})\right)\right]^T \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \in S_t^+, t \in \mathcal{T}_l; \\
& -\left[\nabla \mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})\right)\right]^T \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \in S_{ut}, \ t \in \mathcal{T}_u; \\
& \dot{\lambda}_k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ \in V_k, \quad \dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ \in S_t^-, \quad \dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ \in S_t^+ .
\end{aligned}$$

(4a)

$$\sum_{t\in\mathcal{T}_f}\int_{S_t}\dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x})\eta_t(\mathbf{x})dS=1 \quad \Big| \quad \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})\ge \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) \in S_{ft}. \qquad (5)$$

Здесь $\left[\nabla\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right]$, $\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right]$ - матрицы градиентов условий текучести; $\mathbf{T}_t(\mathbf{x})$ - вектор-функция весовых коэффициентов критерия оптимальности нагрузки. Система уравнений (4а) представляет собой дифференциальные геометрические уравнения конечных элементов, кинематические условия сопряжения элементов и кинематические граничные условия на поверхности S_u. Она описывает область кинематически возможных распределений скоростей перемещений, а условие (5) представляет собой нормализационное ограничение скоростей перемещений и мощности нагрузки для однопараметрической и оптимизационной задач соответственно. Равенство в ограничениях (5) относится к однопараметрической задаче, а неравенство - к задаче оптимизации. Зависимости (4а), (5) определяют область кинематически допустимых функций скоростей перемещений.

В случае кинематически допустимых скоростей перемещений функционалы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ выражают скорость диссипации энергии конечноэлементной модели. Поэтому задачи стационарности (1) и (3) могут быть преобразованы в задачу минимизации

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}_1 = &\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{V_k}\dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x})\left[\nabla\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right]\sigma_k(\mathbf{x})\,dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}_v}\int_{S_t}\left\{\dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x})\right\}^T\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}))\right]\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})\,dS_t + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}}\int_{S_t}\left\{\dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x})\right\}^T\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}))\right]\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})\,dS_t + \qquad (6а)\\ &+\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{V_k}\dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x})\left\{\mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x}))-\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right\}dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}_v}\int_{S_t}\left\{\dot{\lambda}_t^-(\mathbf{x})\right\}^T\left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t^-(\mathbf{x}))-\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x}))\right\}dS_t + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}}\int_{S_t}\left\{\dot{\lambda}_t^+(\mathbf{x})\right\}^T\left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t^+(\mathbf{x}))-\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x}))\right\}dS_t \Rightarrow \mathbf{min}\end{aligned}$$

при условиях (4а), (5).

Если на поверхности S_t нагрузка не распределена, то $\mathbf{p}_t^+(\mathbf{x})=-\mathbf{p}_t^-(\mathbf{x})=\mathbf{p}_t(\mathbf{x})$. Поэтому в тех случаях, когда на поверхностях сопряжения конечных элементов нагрузка не приложена, выражение (2а) целесообразно заменить сдедующим более простым выражением:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 = &\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{V_k}\sigma_k^T(\mathbf{x})[\mathcal{A}]^T\,\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}_v}\int_{S_t}\left\{\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\right\}^T\left\{\dot{\mathbf{u}}_t^-(\mathbf{x})-\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})\right\}dS_t + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}_f}\int_{S_t}\left\{\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\right\}^T\left\{\dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})-\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})\right\}dS_t - \qquad (2б)\\ &-\sum_{t\in\mathcal{T}_u}\int_{S_t}\left\{\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\right\}^T\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})\,dS_t + \\ &+\sum_{k}\int_{V_k}\dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x})\left\{\mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x}))-\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right\}dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}_v}\int_{S_t}\dot{\lambda}_t^T(\mathbf{x})\left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x}))-\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right\}dS_t.\end{aligned}$$

Тогда седловая точка функционалов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}&-\left[\nabla\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right]^T\dot{\lambda}_k(\mathbf{x})+[\mathcal{A}]^T\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})=\mathbf{0} \in V_k, k\in\mathcal{K};\\ &-\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right]^T\dot{\lambda}_t(\mathbf{x})+\dot{\mathbf{u}}_t^-(\mathbf{x})-\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})=\mathbf{0} \in S_t,\ \ t\in\mathcal{T}_v;\\ &-\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right]^T\dot{\lambda}_t(\mathbf{x})+\dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})-\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})=\mathbf{0} \in S_t,\ \ t\in\mathcal{T}_f;\\ &-\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right]^T\dot{\lambda}_t(\mathbf{x})\ -\dot{\mathbf{u}}_t^+(\mathbf{x})=\mathbf{0} \ \in S_{ut},\ t\in\mathcal{T}_u;\\ &\dot{\lambda}_k(\mathbf{x})\ge\mathbf{0} \in V_k,\ \ \dot{\lambda}_t(\mathbf{x})\ge\mathbf{0} \in S_t,\ \ t\in\mathcal{T}; \qquad (4б)\\ &\sum_{t\in\mathcal{T}_f}\int_{S_t}\dot{\mathbf{u}}_t^T(\mathbf{x})\eta_t(\mathbf{x})dS=1 \text{ или } \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})\ge\mathbf{T}_t(\mathbf{x}) \in S_{ft}, (5)\end{aligned}$$

эквивалентной системе (4а), (5). В этом случае задачи стационарности (1), (3) и задача минимизации (6а) преобразуются в задачу

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}_2 = &\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{V_k}\dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x})\left[\nabla\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right]\sigma_k(\mathbf{x})\,dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}}\int_{S_t}\dot{\lambda}_t^T(\mathbf{x})\left[\nabla\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right]\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\,dS_t + \qquad (6б)\\ &+\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{V_k}\dot{\lambda}_k^T(\mathbf{x})\left\{\mathbf{f}_0(C_k(\mathbf{x}))-\mathbf{f}(\sigma_k(\mathbf{x}))\right\}dV_k + \\ &+\sum_{t\in\mathcal{T}}\int_{S_t}\dot{\lambda}_t^T(\mathbf{x})\left\{\mathbf{f}_{0t}(C_t(\mathbf{x}))-\mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x}))\right\}dS_t \Rightarrow \mathbf{min}\end{aligned}$$

при условиях (4б), (5). Три первых члена функционала $\dot{\mathcal{D}}_1$, а также два первых члена функционала $\dot{\mathcal{D}}_2$ выражают скорость диссипации энергии в объеме конечных элементов и в межэлементных поверхностях, а остальные члены для оптимального решения задач (6) равны нулю. Поэтому задачи (6) отвечают кинематической теореме предельной нагрузки о минимуме скорости диссипации энергии [12], [13]. Когда внешняя нагрузка распределена лишь на некоторых поверхностях сопряжения конечных элементов, можно применять гибридные функционалы и условия сопряжения: для загруженных поверхностей - зависимости (2а), (4а), а для остальных - (2б), (4б).

3. Дискретные математические модели кинематической постановки задач

Для дискретизации задач (1), (3) или (6) применяются смешанные конечные элементы. Выбираются интерполяционные функции

$$
\begin{aligned}
&\sigma_k(\mathbf{x})=\left[H_k(\mathbf{x})\right]\sigma_k, && \mathbf{p}_t(\mathbf{x})=\left[H_t(\mathbf{x})\right]\mathbf{p}_t;\\
&\dot\lambda_k(\mathbf{x})=\left[H_{\lambda k}(\mathbf{x})\right]\dot\lambda_k, && \dot\lambda_t(\mathbf{x})=\left[H_{\lambda t}(\mathbf{x})\right]\dot\lambda_t;\\
&\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})=\left[H_{uk}(\mathbf{x})\right]\dot{\mathbf{u}}_k, && \dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})=\left[H_{ut}(\mathbf{x})\right]\dot{\mathbf{u}}_t;\\
&C_k(\mathbf{x})=\left[H_{0k}(\mathbf{x})\right]\mathbf{C}_k; && \mathbf{F}_t(\mathbf{x})=\left[H_{ft}(\mathbf{x})\right]\mathbf{F}_t.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь $\sigma_k, \dot{\mathbf{u}}_k, \dot\lambda_k, \mathbf{C}_k$ - векторы напряжений, скоростей перемещений, пластических множителей и параметров текучести узловых точек k-го элемента. Функции $\sigma_k(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})$ должны быть построены так, чтобы при равенстве обобщенных узловых перемещений $\dot{\mathbf{u}}_k$ и напряжений σ_k смежных конечных элементов соблюдалась неразрывность функций (7) и другие требования сходимости [14].

После подстановки функций (7) задачи (1), (3) получают следующий дискретный вид:

а) однопараметрическая задача -

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{1d} = &\sum_{k\in\mathscr{K}}\sigma_k^T\left[A_k\right]^T\dot{\mathbf{u}}_k + \sum_{t\in\mathscr{T}_v}\left\{\mathbf{p}_t^-\right\}^T\left[A_t\right]^T\left(\dot{\mathbf{u}}_t-\dot{\mathbf{u}}_t^-\right)+\\
&+\sum_{t\in\mathscr{T}_1}\left\{\mathbf{p}_t^+\right\}^T\left[A_t\right]^T\left(\dot{\mathbf{u}}_t-\dot{\mathbf{u}}_t^+\right) - \sum_{t\in\mathscr{T}_u}\left\{\mathbf{p}_t^+\right\}^T\left[A_t\right]^T\dot{\mathbf{u}}_t^+ +\\
&+\sum_{k\in\mathscr{K}}\dot\lambda_k^T\left\{\mathbf{f}_{0k}\left(\mathbf{C}_k\right)-\mathbf{f}_k\left(\sigma_k\right)\right\}+\\
&+\sum_{t\in\mathscr{T}_v}\left\{\dot\lambda_t^-\right\}^T\left\{\mathbf{f}_{0t}\left(\mathbf{C}_t^-\right)-\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^-\right)\right\}+\\
&+\sum_{t\in\mathscr{T}_1}\left\{\dot\lambda_t^+\right\}^T\left\{\mathbf{f}_{0t}\left(\mathbf{C}_t^+\right)-\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t^+\right)\right\}+F_0-F_0\sum_{t\in\mathscr{T}_f}\dot{\mathbf{u}}_{ft}^T\eta_t=\\
=&\,\mathscr{F}_{0d}+F_0-F_0\sum_{t\in\mathscr{T}_f}\dot{\mathbf{u}}_{ft}^T\eta_t\Rightarrow stac;\quad \dot\lambda_k\geq\mathbf{0},\ \dot\lambda_t\geq\mathbf{0};
\end{aligned}
\tag{8}
$$

б) задача оптимизации нагрузки -

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_{2d}=\mathscr{F}_{0d}+\sum_{t\in\mathscr{T}_f}\mathbf{F}_t^T\left\{\mathbf{T}_t-\left[V_t\right]\dot{\mathbf{u}}_t+\dot{\mathbf{v}}_t\right\}\Rightarrow stac;\\
&\dot\lambda_k\geq\mathbf{0},\quad \dot\lambda_t^-\geq\mathbf{0},\quad \dot\lambda_t^+\geq\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь векторы критерия оптимальности и распределения нагрузки

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}_t=\int_{S_{ft}}\left[H_{ft}(\mathbf{x})\right]^T\mathbf{T}_t(\mathbf{x})dS_t,\ \dot{\mathbf{v}}_t=\int_{S_{ft}}\left[H_{ft}(\mathbf{x})\right]^T\dot{\mathbf{v}}_t(\mathbf{x})dS_t,\\
&\eta_t=\int_{S_{ft}}\left[H_{ut}(\mathbf{x})\right]^T\eta_t(\mathbf{x})dS_t,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

а также функций текучести конечного элемента

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}_k\left(\sigma_k\right)=\int_{V_k}\left[H_{\lambda k}(\mathbf{x})\right]^T\mathbf{f}\left(\sigma_k(\mathbf{x})\right)dV_k,\\
&\mathbf{f}_{0k}\left(\mathbf{C}_k\right)=\int_{V_k}\left[H_{\lambda k}(\mathbf{x})\right]^T\mathbf{f}_0\left(C_k(\mathbf{x})\right)dV_k,\\
&\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t\right)=\int_{S_t}\left[H_{\lambda t}(\mathbf{x})\right]^T\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})\right)dS_t,\\
&\mathbf{f}_{0t}\left(\mathbf{C}_t\right)=\int_{S_t}\left[H_{\lambda t}(\mathbf{x})\right]^T\mathbf{f}_{0t}\left(C_t(\mathbf{x})\right)dS_t.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Матрицы

$$
\begin{aligned}
&\left[A_k\right]^T=\int_{V_k}\left[H_k(\mathbf{x})\right]^T[\mathscr{A}]^T\left[H_{uk}(\mathbf{x})\right]dV_k,\\
&\left[A_t\right]^T=\int_{S_t}\left[H_t(\mathbf{x})\right]^T\left[H_{ut}(\mathbf{x})\right]dS_t,\\
&\left[V_t\right]=\int_{S_t}\left[H_{ft}(\mathbf{x})\right]^T\left[H_{ut}(\mathbf{x})\right]dS_t.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Используя зависимость (2б), можно построить второе - сокращенное выражение функционала

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{0d}=&\sum_{k\in\mathscr{K}}\sigma_k^T\left[A_k\right]^T\dot{\mathbf{u}}_k+\sum_{t\in\mathscr{T}_v}\mathbf{p}_t^T\left[A_t\right]^T\left(\dot{\mathbf{u}}_t^- -\dot{\mathbf{u}}_t^+\right)+\\
&+\sum_{t\in\mathscr{T}_f}\mathbf{p}_t^T\left[A_t\right]^T\left(\dot{\mathbf{u}}_t-\dot{\mathbf{u}}_t^+\right)-\sum_{t\in\mathscr{T}_u}\mathbf{p}_t^T\left[A_t\right]^T\dot{\mathbf{u}}_t^+ +\\
&+\sum_k\dot\lambda_k^T\left\{\mathbf{f}_{0k}\left(\mathbf{C}_k\right)-\mathbf{f}_k\left(\sigma_k\right)\right\}+\sum_t\dot\lambda_t^T\left\{\mathbf{f}_{0t}\left(\mathbf{C}_t\right)-\mathbf{f}_t\left(\mathbf{p}_t\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

и соответственно преобразовать функционалы $\mathscr{F}_{1d}$, $\mathscr{F}_{2d}$. Эти сокращенные выражения можно использовать в тех случаях, когда на поверхностях сопряжения конечных элементов нагрузка не приложена.

Условие стационарности функционала $\mathscr{F}_{1d}$ или $\mathscr{F}_{2d}$ по переменным σ_k и $\mathbf{p}_t^-$, $\mathbf{p}_t^+$, F_0 или

$\mathbf{p}_t$, F_t позволяет получить дискретные выражения геометрических уравнений конечных элементов

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_k(\sigma_k)\right]^T \dot{\lambda}_k + \left[A_k\right]^T \dot{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_k \geq \mathbf{0},\quad k \in \mathscr{K},$$

условий совместности скоростей перемещений между элементами

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^-)\right]^T \dot{\lambda}_t^- + \left[A_t\right]^T \left(\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{u}}_t^-\right) = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_t^- \geq \mathbf{0},\quad t \in \mathscr{T}_v;$$

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+)\right]^T \dot{\lambda}_t^+ + \left[A_t\right]^T \left(\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{u}}_t^+\right) = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_t^+ \geq \mathbf{0},\quad t \in \mathscr{T}_t$$

или

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\right]^T \dot{\lambda}_t + \left[A_t\right]^T \left(\dot{\mathbf{u}}_t^- - \dot{\mathbf{u}}_t^+\right) = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_t \geq \mathbf{0},\quad t \in \mathscr{T}_t,$$

кинематических граничных условий

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t^+)\right]^T \dot{\lambda}_t^+ - \left[A_t\right]^T \dot{\mathbf{u}}_t^+ = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_t^+ \geq \mathbf{0},\quad t \in \mathscr{T}_u$$

и условий нормализации

$$\sum_{t \in \mathscr{T}_t} \dot{\mathbf{u}}_{ft}^T \eta_t = 1 \quad \text{или} \quad \mathbf{T}_t + \dot{\mathbf{v}}_t - \left[V_t\right] \dot{\mathbf{u}}_{ft} = \mathbf{0},\ \dot{\mathbf{v}}_t \geq \mathbf{0}.$$

Объединяя и принимая их за предварительные условия, задачи определения стационарной точки функционалов $\mathscr{F}_{1d}$ и $\mathscr{F}_{2d}$ преобразуются в следующие задачи минимизации:

а) задача определения параметра предельной нагрузки -

$$\dot{\mathscr{D}} = \dot{\lambda}_\sigma^T \left[\nabla \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right] \sigma + \dot{\lambda}_p^T \left[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right] \mathbf{p} +$$
$$+ \dot{\lambda}_\sigma^T \left\{\mathbf{f}_{0\sigma}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right\} + \dot{\lambda}_p^T \left\{\mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}) - \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right\} \Rightarrow \min$$

при условиях (14)

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right]^T \dot{\lambda}_\sigma + \left[A_\sigma\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_\sigma \geq \mathbf{0},$$
$$-\left[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right]^T \dot{\lambda}_p + \left[A_p\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_p \geq \mathbf{0},\quad \dot{\mathbf{u}}^T \eta = 1;$$

б) задача оптимизации нагрузки -

найти $\dot{\mathscr{D}} \Rightarrow \min$

при условиях (15)

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right]^T \dot{\lambda}_\sigma + \left[A_\sigma\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_\sigma \geq \mathbf{0},$$
$$-\left[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right]^T \dot{\lambda}_p + \left[A_p\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda}_p \geq \mathbf{0},\quad [V]\dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T}.$$

Здесь $\left[\overline{A}_\sigma\right], \left[\nabla \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right], \left[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right]$ - алгебраические матрицы, диагональными блоками которых являются матрицы $\left[A_k\right], \left[\nabla \mathbf{f}_k(\sigma_k)\right], \left[\nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{p}_t)\right]$. Матрица $\left[A_\sigma\right]^T \equiv \left[\left[\overline{A}_\sigma\right]^T, [0]\right]$ получается добавлением нулевых столбцов к матрице $\left[\overline{A}_\sigma\right]^T$. Векторы σ, $\dot{\lambda}$ состоят из совокупности векторов $\sigma_k, \dot{\lambda}_k, k = 1, 2, \ldots, s$. Составляющими векторов $\mathbf{p}$, $\dot{\lambda}_p$, $\dot{\mathbf{u}}$ являются векторы $\mathbf{p}_t^-, \mathbf{p}_t^+, \dot{\lambda}_t^-, \dot{\lambda}_t^+$ и $\dot{\mathbf{u}}_k, \dot{\mathbf{u}}_t$ соответственно.

Неизвестными в задачах (14) и (15) являются векторы напряжений, скоростей перемещений и пластических множителей. Однако вектор $\dot{\mathbf{u}}$ можно исключить из числа основных неизвестных. Вводим векторы $\overline{\sigma} \equiv \left\{\sigma, \mathbf{p}\right\}^T$, $\dot{\lambda} \equiv \left\{\dot{\lambda}_\sigma, \dot{\lambda}_p\right\}^T$, $\mathbf{f}(\overline{\sigma}) \equiv \left\{\mathbf{f}_\sigma(\sigma), \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right\}^T$, $\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) \equiv \left\{\mathbf{f}_{0\sigma}(\mathbf{C}), \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C})\right\}^T$. Тогда геометрические уравнения можно представить одним матричным уравнением

$$-\left[\nabla \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right]^T \dot{\lambda} + [A]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0} \qquad (16)$$

и задачи (14), (15) записать в сокращенном виде: найти

$$\dot{\mathscr{D}} = \dot{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right] \overline{\sigma} + \dot{\lambda}^T \left\{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right\} \Rightarrow \min$$

при условиях (17)

$$-\left[\nabla \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right]^T \dot{\lambda} + [A]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\quad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0},$$
$$\dot{\mathbf{u}}^T \eta = 1 \quad \Big| \quad [V]\dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T}.$$

Здесь левое условие нормализации относится к однопараметрической задаче, а правое - к задаче оптимизации. Матрицы

$$\left[\nabla \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right] = \begin{bmatrix} \left[\nabla \mathbf{f}_\sigma(\sigma)\right] & \\ & \left[\nabla \mathbf{f}_p(\mathbf{p})\right] \end{bmatrix},\quad [A] = \left[\left[A_\sigma\right], \left[A_p\right]\right].$$

Выбирая базисную матрицу $\left[A_1\right]^T$, уравнение (16) записываем в виде двух уравнений:

$$-\left[\nabla \mathbf{f}_1(\overline{\sigma})\right]^T \dot{\lambda} + \left[A_1\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$
$$-\left[\nabla \mathbf{f}_2(\overline{\sigma})\right]^T \dot{\lambda} + \left[A_2\right]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

Решение первого уравнения

$$\dot{\mathbf{u}} = \left(\left[A_1\right]^T\right)^{-1} \left[\nabla \mathbf{f}_1(\overline{\sigma})\right]^T \dot{\lambda} = \left[B_u(\overline{\sigma})\right] \dot{\lambda} \qquad (18)$$

подставляется во второе уравнение. Получается уравнение совместности деформаций

$$\left[B(\overline{\sigma})\right]\dot{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad (19)$$

где $\quad \left[B(\overline{\sigma})\right] = \left[A_2\right]^T \left[B_u(\overline{\sigma})\right] - \left[\nabla \mathbf{f}_2(\overline{\sigma})\right]^T.$

С учетом зависимостей (18) и (19) математическая модель кинематической постановки задач (17) модифицируется к виду:

найти

$$\dot{\mathscr{D}} = \dot{\lambda}^T \left[\nabla \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right] \overline{\sigma} + \dot{\lambda}^T \left\{\mathbf{f}_0(\mathbf{C}) - \mathbf{f}(\overline{\sigma})\right\} \Rightarrow \mathbf{min}$$

при условиях (20)

$$\left[B(\overline{\sigma})\right]\dot{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

$$\dot{\lambda}^T \left[B_u(\overline{\sigma})\right]^T \eta = 1 \quad \Big| \quad [V]\left[B_u(\overline{\sigma})\right]\dot{\lambda} \geq \mathbf{T}.$$

Решением задачи (20) являются векторы $\overline{\sigma}^*, \dot{\lambda}^*$ и величина скорости диссипации энергии $\dot{\mathscr{D}}^*$. Зависимость (18) позволяет исключить скорости перемещений из числа основных неизвестных и определить вектор $\dot{\mathbf{u}}$ после решения задачи (20).

В частных случаях условий текучести появляются и другие возможности уменьшения числа основных неизвестных. Например, в случае линейных условий текучести

$$\mathbf{f}(\overline{\sigma}) = [\Phi]\overline{\sigma} \leq \mathbf{C}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{C})$$

математические модели (17) и (20) принимают следующий вид:

а) найти $\quad \mathbf{C}_0^T \dot{\lambda} \Rightarrow \mathbf{min}$

при условиях

$$-[\Phi]^T \dot{\lambda} + [A]^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{u}}^T \eta = 1 \quad \Big| \quad [V]\dot{\mathbf{u}} \geq \mathbf{T};$$

б) найти $\quad \mathbf{C}_0^T \dot{\lambda} \Rightarrow \mathbf{min}$

при условиях

$$[B]\dot{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

$$\dot{\lambda}^T \left[B_u\right]^T \eta = 1 \quad \Big| \quad [V]\left[B_u\right]\dot{\lambda} \geq \mathbf{T},$$

где неизвестным является лишь вектор пластических множителей, а матрицы

$$\left[B_u\right] = \left(\left[A_1\right]^T\right)^{-1}\left[\Phi_1\right]^T, \quad [B] = \left[A_2\right]^T\left[B_u\right] - \left[\Phi_2\right]^T.$$

В случае линейных условий текучести достаточно задать интерполяционные функции лишь для скоростей перемещений, пластических множителей и распределенной нагрузки, т.е. применять геометрически совместные конечные элементы.

4. Дискретные математические модели статической постановки задач

С использованием метода множителей Лагранжа кинематические постановки задач могут быть преобразованы в двойственные к ним статические постановки.

Задача определения параметра нагрузки F_0. Преобразованием задачи (14) получается следующая математическая модель:

найти $\quad F_0 \Rightarrow \mathbf{max}$

при условиях (21)

$$\mathbf{f}_\sigma(\sigma) \leq \mathbf{f}_{0\sigma}(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \leq \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}),$$

$$-\left[A_\sigma\right]\sigma - \left[A_p\right]\mathbf{p} + \eta F_0 = \mathbf{0}.$$

С учетом принятых выше обозначений она трансформируется в задачу:

найти $\quad F_0 \Rightarrow \mathbf{max}$

при условиях (22)

$$\mathbf{f}(\overline{\sigma}) \leq \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad -[A]\overline{\sigma} + \eta F_0 = \mathbf{0},$$

которая двойственна задаче (17). Ограничения-неравенства в условиях задач (21) и (22) представляют собой условия текучести, а равенства - уравнения равновесия дискретной модели конструкции. Вместе они определяют множество статически допустимых векторов напряжений $\overline{\sigma}$. Таким образом, задачи (21), (22) отвечают известной теореме А.Гвоздева о множителе предельной нагрузки.

Используя решение уравнений равновесия

$$\overline{\sigma} = \left[B_1\right]\eta F_0 + \left[B_2\right]\overline{\sigma}_2,$$

можно исключить базисные напряжения $\overline{\sigma}_1$. Здесь $\left[B_1\right], \left[B_2\right]$ - матрицы частного и общего решений уравнений равновесия [15]. Тогда получается задача:

найти

$$F_0 \Rightarrow \mathbf{max} \quad \text{при условиях} \quad \bar{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}_2, F_0) \le \mathbf{f}_0(\mathbf{C}). \qquad (23)$$

Эта модель двойственна задаче (20) и также может быть получена преобразованием последней при помощи метода множителей Лагранжа.

Задача оптимизации нагрузки. Результатом применения преобразований Лагранжа к задачам (15), (17) и (20) являются следующие математические модели статической постановки задачи оптимизации нагрузки:

а) найти $\mathbf{T}^T \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{max}$

при условиях (24)

$$\mathbf{f}_\sigma(\sigma) \le \mathbf{f}_{0\sigma}(\mathbf{C}), \quad \mathbf{f}_p(\mathbf{p}) \le \mathbf{f}_{0p}(\mathbf{C}),$$

$$-[A_\sigma]\sigma - [A_p]\mathbf{p} + [V]^T \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \ge \mathbf{0};$$

б) найти $\mathbf{T}^T \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{max}$

при условиях (25)

$$\mathbf{f}(\bar{\sigma}) \le \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad -[A]\bar{\sigma} + [V]^T \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \ge \mathbf{0};$$

в) найти $\mathbf{T}^T \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{max}$ (26)

при условиях $\bar{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}_2, \mathbf{F}) \le \mathbf{f}_0(\mathbf{C}), \quad \mathbf{F} \ge \mathbf{0}.$

При фиксированных скоростях перемещений $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}$ функция цели этих задач имеет физический смысл мощности внешней нагрузки. Поэтому задачи (24)-(26) отвечают статической теореме предельной нагрузки (о мощности нагрузки [12], [16]).

5. Заключение

Разработанные математические модели представляют собой двойственные пары задач математического программирования в кинематической и статической формулировках. Они позволяют определять верхние оценки напряжений, скоростей перемещений и пластических множителей, скорости диссипации энергии, мощности нагрузки и параметра F_0 или оптимального распределения нагрузки. Кинематические постановки являются прямыми задачами. Они позволяют определить распределение скоростей перемещений, пластических множителей и напряжений (только в случае нелинейных условий текучести) и величину скорости диссипации энергии. Скорости перемещений и пластических множителей (кинематические величины) характеризуют механизм пластического разрушения конструкции. Однако для инженерной практики наиболее важны статические величины, т.е. распределение напряжений и предельной нагрузки. Они определяются решением двойственных задач - статических математических моделей (21) - (26).

Согласно первой теореме двойственности для оптимальных решений задач (14) и (21) $F_0^* = \dot{\mathscr{D}}^*$. Поэтому решением кинематических постановок (14), (20) определяется и значение параметра разрушающей нагрузки. Однако решение кинематической постановки задачи оптимизации не дает прямого ответа об оптимальном распределении нагрузки. В случае нелинейных условий текучести решением задачи (15) или (20) определяются и напряжения. Тогда вектор нагрузки F, характеризующий оптимальное распределение нагрузки, можно определить из уравнений равновесия. Однако решить задачу (15) при нелинейных условиях текучести гораздо сложнее, нежели двойственную ей статическую задачу (24). В случае линейных условий текучести оптимальное распределение нагрузки можно определить только решением математических моделей (24)-(26) статической постановки. В силу указанных обстоятельств предпочтительны статические постановки задач, и с практической точки зрения они выходят на первый план.

В представленных дискретных математических моделях удовлетворяются дифференциальные уравнения кинематической совместности в объеме конечных элементов (в ослабленной - интегральной форме) и кинематические условия сопряжения между элементами, а также кинематические граничные условия. Поэтому все дискретные математические модели (и кинематические, и статические) будем называть постановками по совместности. Вместе с моделями по равновесию (также в статической и двойственной кинематической формулировках), разработанными в [10] с применением равновесных конечных элементов, они позволяют определять нижние и верхние оценки распределения предельной нагрузки, в том числе оптимального, и всех параметров напряженно-деформированного состояния тела, отвечающих состоянию простого пластического разрушения. Для стержневых конструкций эти оценки совпадают и представляют собой точное решение. Таким образом, создаются хорошие возможности для проверки достоверности и точности результатов численных решений и достаточности густоты конечноэлементной сетки.

Если бы область, занимаемую второй и третьей графами табл. 1, представить, предположим, в виде игрового поля, то разработанные здесь и в [10] математические модели (III группа работ) позволяют вести игру численного анализа по всему игровому полю, в то время как в работах первой и второй групп игра ведется только на половине поля. Предлагаемый подход позволяет взглянуть на одну и ту же проблему с четырех сторон.

Литература

1. P.G.Hodge, T.Belytschko. Numerical methods for the limit analysis of plates // Trans. ASME, **E35**, № 4, 1968, p. 796-802.
2. A.Biron, G.Charleux. Limit analysis of axisymmetric pressure vessel intrsections of arbitrary shape // Int. J. Mech. Sci., **14**, № 1, 1972, p. 25-41.
3. E.Anderhegeen, H.Knopfel. Finite element analysis using linear programming // Int. J. Solids and Struct., **8**, № 12, 1972, p. 1413-1431.
4. S.Turgeman, J.Pastor. Limit analysis: a linear formulation of the kinematic approach for axisymmetric mechanics problems // J. Int. Numer. and Anal. Meth. Geomech., **6**, № 1, 1982, p. 109-128.
5. T.Kowai, Y.Toi. A discrete method of limit analysis and its application to plastic stability problems of structural members // Eng. Struct., **5**, № 1, 1983, p. 38-44.
6. A.A. Čyras. Analysis and optimization of elastoplastic systems. New York - Chichester - Brisbane - Toronto: Ellis Horwood Limited, 1983. 115 p.
7. A.Čyras and S.Kalanta. Optimal design of cylindrical schels by the finite element technique // Mech. Res. Comm., vol. 1, 1974, p. 125-130.
8. T.Belytschko, M.Velebit. Finite element method for elastic plastic plates // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., **98**, № 1, 1972, p. 227-242.
9. G.Maier, R.A.Zavelani, D.Bennedetti. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress // Int. Numer. Meth. Eng., 1972, 4, № 4, p. 455-473.
10. С.Каланта. Равновесные конечно-элементные постановки задач расчета и оптимизации предельной нагрузки // Statyba (Строительство), №3(7), Вильнюс: Техника, 1996, с. 13-23.
11. С.Каланта. Двойственные задачи предельного равновесия с разрывами скоростей перемещений // Statyba (Строительство), № 2(2), Вильнюс: Техника, 1995, с. 20-25.
12. А.А. Чирас. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнюс: Минтис, 1971. 123 с.
13. А.А.Чирас, А.Э.Боркаускас, Р.П.Каркаускас. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Л.: Стройиздат, 1974. 280 с.
14. Р.Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир , 1984. 428 с. (пер. с англ.).
15. С.Каланта. Равновесные конечные элементы в расчетах упругих конструкций // Statyba (Строительство), №1(1), Вильнюс: Техника, 1995, с. 25-47.
16. S.Kalanta. Relations and transformations of extremum energy principles for deformable body // Statyba (Civil Engineering), Nr.1(9), Vilnius:Technika, 1997, p.49-56.

Įteikta 1997 04 07

KONSTRUKCIJŲ RIBINĖS APKROVOS SKAIČIAVIMO UŽDAVINIŲ DUALIEJI MATEMATINIAI MODELIAI NAUDOJANT MIŠRIUOSIUS BAIGTINIUS ELEMENTUS

S.Kalanta

Santrauka

Sudaromi standžiojo-plastiškojo kūno ribinės apkrovos analizės ir optimizavimo uždavinių bendrieji ir diskretieji dualieji matematiniai modeliai kinematine ir statine formuluote, naudojant mišriuosius baigtinius elementus. Juose atsižvelgiama į energijos disipacijos greitį ne tik baigtinių elementų tūryje, bet ir plastinio tekėjimo paviršiuose tarp elementų, kur atsiranda poslinkių greičių funkcijų trūkiai. Taikoma plastinio tekėjimo teorija, dualumo teorija bei matematinis programavimas.

Naudojant straipsnyje [10] pateiktas šių uždavinių bendrąsias statines formuluotes ir Lagranžo daugiklių metodą sudaromi abiejų uždavinių mišrieji energiniai funkcionalai (1) ir (3). Jų diskretizacijai panaudoti mišrieji baigtiniai elementai. Pasirenkant įtempimų, poslinkių greičių, plastinių daugiklių bei išorinės apkrovos interpoliavimo funkcijas (7) sudaromos mišriųjų funkcionalų diskrečiosios išraiškos (8), (9), (13) ir šių funkcionalų stacionarumo pagal statinius kintamuosius (įtempimų ir apkrovos vektorius) sąlygos. Iš jų gaunamos geometrinės darnos lygčių bei apkrovos galingumo normalizavimo diskrečiosios išraiškos. Jas naudojant kaip išankstines funkcionalų (8) ir (9) sąlygas sudaromi ribinės apkrovos analizės ir optimizacijos uždavinių kinematinės formuluotės matematiniai modeliai (14), (15), (17). Išeliminavus poslinkių greičius, sudarytas modelis (20) su mažesniu nežinomųjų skaičiumi. Naudojant Lagranžo daugiklių metodą sudaryti statinės formuluotės matematiniai modeliai (21)-(23) ribinės apkrovos parametro nustatymo uždaviniui ir modeliai (24)-(26)

apkrovos optimizavimo uždaviniui. Visi jie yra matematinio programavimo uždaviniai.

Inžineriniams tikslams svarbesni ir tinkamesni statinės formuluotės matematiniai modeliai. Jie lengviau išsprendžiami (mažiau nežinomųjų), be to, tik jie leidžia nustatyti optimalų apkrovos pasiskirstymą. Sudaryti matematiniai modeliai leidžia rasti ribinės apkrovos, įtempimų, poslinkių ir plastinių daugiklių greičių viršutines reikšmes. Kartu su šių uždavinių pusiausvyriniais modeliais [10], sudarytais naudojant pusiausviruosius baigtinius elementus, jie leidžia sužinoti nurodytų parametrų apatines ir viršutines reikšmes. Strypinių konstrukcijų atveju jos sutampa, t.y. išreiškia tikslųjį sprendinį. Taigi atsiranda gera galimybė patikrinti skaitinių skaičiavimo rezultatų patikimumą bei tikslumą ir sužinoti, ar pakankamas baigtinių elementų skaičiuojamojo tinklo tankis.

DUAL MATHEMATICAL MODELS OF LIMIT LOAD ANALYSIS PROBLEMS OF STRUCTURES BY MIXED FINITE ELEMENTS

S. Kalanta

S u m m a r y

The general and discrete dual mathematical models of the limit load analysis and optimization problems of rigid-plastic body are created in the article. The discrete models are formulated by mixed finite elements and presented in terms of kinematic and static formulation. In these models the velocity of the energy dissipation is estimated not only within the volume of finite elements, but also at the plastic surfaces between elements, where the discontinuities of displacement velocities functions appear. The theory of plastic flow, the theory of duality and mathematical programming are applied.

The mixed energy functionals (1) and (3) of both problems are formulated using the general static formulations of these problems, presented in the article [10], and Lagrangian multipliers method. The mixed finite elements are used for their discretization. The discrete expressions (8), (9) and (13) of mixed functionals are given choosing the interpolation functions (7) for the stress, displacement velocities, plastic multipliers and external load. Stationary conditions are created by static variables (stress and load vectors) of theses functionals. The discrete expressions of the geometric compatibility equations and constraint of load power are received from them. Using them as preliminary conditions for the functionals (8) and (9), the mathematical models (14), (15) and (17) of kinematic formulation of limit load analysis and optimization problems are formulated. The model (20) with a smaller number of unknowns is formed by elimination the displacement velocities. Using Lagrangian multipliers method, the mathematical models (21)-(23) of static formulation for the limit load parameter analysis problem and the models (24)-(26) for the load optimization problem are derived. All of them are the problems of mathematical programming.

The mathematical models of static formulation for engineering purposes are more important and fit better. They are easier solved (a smaller quantity of unknowns), besides, they allow to determine the optimum distribution of the load. The formulated mathematical models allow to determine upper values of limit load, stresses, displacement and plastic multipliers velocities. Together with equilibrium models of these problems, presented in the article [10], they allow to determine the lower and upper values of aforementioned parameters. So, a good possibility is created to check reliability and exactness of numerical calculation results and to establish, if the computing net density of finite elements is sufficient.

Stanislovas KALANTA. Doctor, Associate Professor. Department of Structural Mechanics. Vilnius Gediminas Technical University, 11 Saulėtekio Ave, 2040 Vilnius, Lithuania.

Doctor (structural mechanics), 1974. Research visits to: Leningrad Polytechnic Institute, Moscow Civil Engineering Institute, Kiev Civil Engineering Institute. Research interests: computational mechanics, finite element method, analysis and optimization of elastic-plastic structures.